

Wyznaczanie zasilania infiltracyjnego za pomocą zmodyfikowanego równania przepływu

Estimation of Groundwater Recharge Based on Modified flow equation

Marcin Stachurski

Politechnika Warszawska, Instytut Systemów Inżynierii Środowiska,
ul. Nowowiejska 20, 00-653 Warszawa,
e-mail: marcin.stachurski@is.pw.edu.pl

Abstract: Proper management of groundwater systems requires reliable assessment of its resources, particularly specification of spatial distribution and rates of recharge. Estimation of groundwater recharge based on measured water-table shape may be classified as an example of the “inverse problem”. Using “noisy” data, what is the typical case where measurement are discussed, leads to numerical instability and unreliable estimation of recharge. In this article the special modification to the flow equation is presented and verified in this article.

Key words: groundwater recharge, groundwater movement, inverse problem

1. Zasilanie infiltracyjne wód podziemnych

Racjonalne wykorzystanie zasobów wód podziemnych możliwe jest jedynie wtedy, gdy są one wiarygodnie udokumentowane ze szczególnym uwzględnieniem mechanizmów odnawiania. Zasilanie, rozumiane jako trwałe lub czasowe zwiększenie zasobów, może być efektem wielu procesów: infiltracji, podsiąkania, dopływu dalekiego zasięgu, dopływu bocznego z lokalnych wód powierzchniowych, uwalniania wód juwenilnych. W większości przypadków największy udział w zasilaniu zbiorników wód podziemnych ma zasilanie infiltracyjne, którego głównym źródłem jest opad deszczu oraz topniejąca pokrywa śnieżna, ale także drenaż zbiorników wód powierzchniowych lub sztuczne nawodnienia. W naturalnych warunkach strumień zasilania infiltracyjnego jest przestrzennie niejednorodny oraz zmienny w czasie, co czyni jego wyznaczenie jednym z najtrudniejszych zadań hydrogeologii.

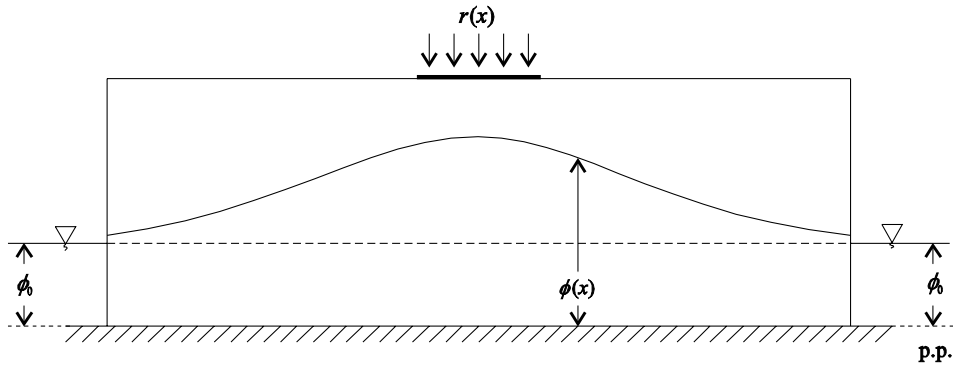
2. Wyznaczanie zasilania infiltracyjnego jako zagadnienie odwrotne hydrogeologii

W hydrogeologii przyjmuje się zwyczajowo, że problem wyznaczenia przestrzennego rozkładu oraz dynamiki wysokości hydraulicznej w warstwie wodonośnej należy do klasy zadań prostych (Nawalany, Stachurski, 2005). Zakłada się zwykle przy tym, że warunek początkowy, parametry warstwy wodonośnej oraz warunki brzegowe i człony źródłowe (w tym zasilanie infiltracyjne) są znane. Założenie takie pozwala wyznaczać jednoznacznie rozkład wysokości hydraulicznej na drodze rozwiązywania dwu- lub trójwymiarowego równania przepływu wody w ośrodku porowatym. Niekiedy jednak rozważany jest problem odtworzenia jednej z tych wielkości (warunku początkowego, warunku brzegowego, parametrów lub infiltracji) na podstawie znanego, w praktyce pomierzonego, rozkładu wysokości hydraulicznej. Tego typu zagadnienia są przykładami zadań odwrotnych hydrogeologii. Sformułowania tego typu zadań najczęściej dotyczą wyznaczenia parametrów warstwy wodonośnej (Yeh, 1986), a najlepszym ich przykładem są powszechnie stosowane i uznane metody próbnych pompowań (np. Dąbrowski, Przybyłek, 2005). W literaturze znaleźć można również przykłady minimalizacji wpływu błęd oszacowania warunku początkowego na ewolucję wysokości hydraulicznej (np. Nawalany, 1984). Niewątpliwie najtrudniejszym i najrzadziej poruszonym w literaturze tematem jest szacowanie zasilania infiltracyjnego. Powodem tego stanu rzeczy są problemy związane z dobrym sformułowaniem tego zadania odwrotnego.

3. Sformułowanie problemu rekonstrukcji wymuszeń

W przypadku przewagi zasilania infiltracyjnego nad parowaniem należy spodziewać się, że w dostatecznie długim czasie woda infiltrująca z powierzchni ziemi w kierunku strefy saturacji spowoduje powstanie wzniesienia swobodnego zwierciadła (ryc. 1). Obserwując zatem położenie zwierciadła wód podziemnych, można wnioskować o strumieniu zasilania. Należy jednak pamiętać, że infiltracja nie jest jedynym czynnikiem wpływającym na zmianę rzędnej zwierciadła (Hendricks Franssen i in., 2004) – konieczne jest, wspomniane już wcześniej, założenie, że znany jest wpływ pozostałych czynników, takich jak warunki brzegowe, warunek początkowy oraz parametry hydrauliczne warstwy wodonośnej.

Przechodząc od intuicji do opisu matematycznego, należy zauważyć, że zasilanie infiltracyjne, w zależności od wymiarowości zadania, może być warunkiem brzegowym (w przypadku modeli trójwymiarowych, modeli dwuwymiarowych w płaszczyźnie $X-Z$ lub $Y-Z$ oraz jednowymiarowych w kierunku Z) lub członem źródłowym (w przypadku modeli dwuwymiarowych w płaszczyźnie $X-Y$ oraz jednowymiarowych w kierunku X lub Y). Jeżeli przyjąć dwuwymiarowy model płaski przepływu ustalonego w jednorodnej, izotropowej warstwie wodonośnej w płaszczyźnie $X-Z$, równanie modelowe ma postać równania Poissona:



Ryc. 1. Wzniesienie zwierciadła wód podziemnych spowodowane lokalnym zasilaniem infiltracyjnym

Fig. 1. Water-table rise caused by local infiltration recharge

$$\frac{\partial^2 \phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial y^2} = -\frac{2}{k} r \quad (1)$$

Równanie (1) zapisać można, wprowadzając symbol operatora różniczkowego A^{-1} przekształcającego funkcję $\phi(x,y)$ w $r(x,y)$:

$$r = A^{-1} \phi = -\frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Analizując równanie przepływu zapisane w formie (2), łatwo można zauważyć, że rozwiązanie zagadnienia odwrotnego zdefiniowanego za jego pomocą jest zadaniem trywialnym, zawartym wprost w równaniu przepływu. Problem sprowadza się bowiem do odpowiedniego zróżniczkowania funkcji wysokości hydraulicznej. Jednak jest tak jedynie w przypadku abstrakcyjnych rozważań teoretycznych, gdy dana (lub znana) jest analityczna postać funkcji $\phi(x,y)$ lub jej dokładne wartości w odpowiednio gęstej siatce dyskretnych punktów. W sytuacjach rzeczywistych oczekiwać można trudności związanych ze złym sformułowaniem problemu polegającym na tym, że:

- rzędna zwierciadła nigdy nie jest znana w postaci funkcji ciągłej, zwykle dostępne są jedynie dane pomiarowe pochodzące z piezometrów lub studni rozmieszczonych w dyskretnych punktach przestrzeni; istnieje co prawda możliwość interpolowania tych wartości do dowolnego punktu warstwy wodonośnej, jednak wartości interpolowane obarczone są błędem, który wzrasta w wyniku stosowania operacji różniczkowania; pewne popularne metody interpolacji, np. metoda krigingu, są wręcz nieprzydatne do wykorzystania we wzorze (2), gdyż wyznaczają powierzchnie o nieciągłej drugiej pochodnej;
- pomierzona wysokość hydrauliczna zawsze obarczona jest błędem pomiaru;

- różniczkowanie „zaszumionych” danych prowadzi do dużych błędów oszacowania zasilania wzrastających kwadratowo wraz ze zmniejszaniem wymiarów siatki dyskretyzacji.

Powyższe trudności znajdują swoje matematyczne wyjaśnienie w twierdzeniu dotyczącym dobrego sformułowania zadania odwrotnego (Allison, 1988):

Warunkiem koniecznym i wystarczającym dobrego, tj. posiadającego jednoznaczne rozwiązanie oraz niewrażliwego na niewielkie zmiany danych wejściowych, sformułowania zadania odwrotnego jest istnienie skończonego operatora odwrotnego A^{-1} .

Operator A^{-1} występujący w równaniu (2) nie spełnia warunków powyższego twierdzenia, ponieważ:

- może nie istnieć ze względu na nieistnienie drugich pochodnych interpolowanych wartości,
- może nie być skończony ze względu na nieciągłość drugiej pochodnej interpolowanych wartości,
- jest wrażliwy na zmiany danych wejściowych, ponieważ pomierzona wysokość hydrauliczna zawsze obciążona jest błędem pomiaru, a różniczkowanie takich danych prowadzi do dużych błędów oszacowania, które ponadto wzrastają kwadratowo wraz ze zmniejszaniem wymiarów siatki dyskretyzacji.

Rozwiązaniem powyższego problemu, które jest przedmiotem eksperymentów numerycznych przedstawionych w dalszej części artykułu, jest modyfikacja operatora różniczkowego w taki sposób, by spełniał on warunki dobrego sformułowania zadania odwrotnego. Propozycja przedstawiona przez Allisona (1988) prowadzi do zmodyfikowanego równania przepływu:

$$r_\alpha + \alpha \left(\frac{\partial^2 r_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r_\alpha}{\partial y^2} \right) = -\frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Lewa strona równania (3) może być interpretowana jako równanie napiętej membrany o jednostkowym współczynniku elastyczności, do której została przyłożona siła wynikająca z rozwiązania prawej strony równania (3), przy czym współczynnik α decyduje o napięciu membrany. Rozwiązanie $r_\alpha(x,y)$ równania (3) jest wolne od wpływu szumu związanego z pomiarami oraz interpolacją funkcji wysokości hydraulicznej (Allison, 1988), nie jest natomiast tożsame (prócz szczególnego przypadku, gdy $\alpha=0$) z poszukiwanym zasilaniem $r(x,y)$, które jest rozwiązaniem oryginalnego równania przepływu (2). Dobór odpowiedniej wartości parametru α pozwala na osiągnięcie kompromisu pomiędzy stabilnością rozwiązania równania (3) a minimalizacją wyrażenia $|r_\alpha - r|$.

4. Eksperymenty numeryczne

Wykorzystując metodę różnic skończonych, równania różniczkowe (2) oraz (3) można przybliżyć układem równań algebraicznych, otrzymując odpowiednio:

$$A_1 \varphi^2 = r - wb\varphi^2 \quad (4)$$

oraz

$$A_1 \varphi^2 + wb\varphi^2 = A_2 r_\alpha + wbr_\alpha \quad (5)$$

gdzie: A_1, A_2 – macierze współczynników równań algebraicznych,
 φ^2 – wektor kwadratów wartości funkcji φ w węzłach dyskretyzacji,
 r – wektor wartości zasilania infiltracyjnego,
 $wb\varphi^2$ – wektor znanych wartości brzegowych funkcji φ ,
 wbr_α – wektor znanych wartości brzegowych funkcji r_α .

Rozwiązanie równania macierzowego (4) ze względu na wektor φ :

$$\varphi = \sqrt{A_1^{-1} \cdot (r - wb\varphi^2)} \quad (6)$$

proceedzi do wyznaczenia dyskretnych wartości wysokości hydraulicznej na podstawie znanych wartości zasilania infiltracyjnego, jest tym samym rozwiązaniem zadania prostego. To samo równanie rozwiązane ze względu na wektor r :

$$r = A_1 \varphi^2 + wb\varphi^2 \quad (7)$$

jest tożsame z rozwiązaniem zadania odwrotnego zdefiniowanego na podstawie klasycznego równania przepływu. Rozwiązanie układu równań (5) ze względu na wektor nieznanych wartości oszacowania zasilania infiltracyjnego r_α w postaci:

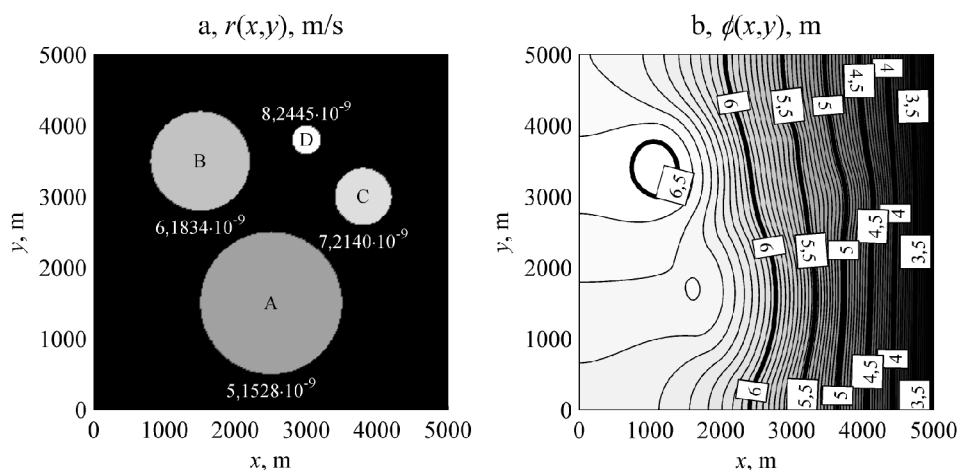
$$r_\alpha = A_2^{-1} \cdot (A_1 \varphi^2 + wb\varphi^2 - wbr_\alpha) \quad (8)$$

proceedzi do rozwiązania zadania odwrotnego wykorzystującego zmodyfikowane równanie przepływu.

Rozwiązanie zadania prostego

Równanie (4) rozwiązano przyjmując jednorodną wartość parametru k równą $1 \cdot 10^{-3}$ m/s oraz zakładając, że na modelowanym obszarze w kształcie kwadratu o boku 5000 m znajdują się cztery obszary zasilania infiltracyjnego o kształtach i rozmieszczeniu takim, jak na rycinie 2a. Wielkość strumienia zasilania infiltracyjnego na każdym z obszarów zdefiniowana została jako procent założonego średniorocznego opadu w wysokości 650 mm. Wartości przedstawiono w tabeli 1.

Przestrzenny rozkład wysokości hydraulicznej, przedstawiony w postaci mapy hydroizohips na rycinie 2b, charakteryzuje się gradientem (liczonym między największą a najmniejszą wartością) rzędu 0,0089%, który lokalnie przyjmuje maksymalne wartości bezwzględne 0,2133% oraz 0,0349% odpowiednio w kierunku X oraz Y .



Ryc. 2. Rozkład przestrzenny zasilania infiltracyjnego (a) oraz wysokości hydraulicznej (b) jako rozwiązanie zadania prostego ($k = 1 \cdot 10^{-3}$ m/s)

Fig. 2. Spatial distribution of groundwater recharge (a) and hydraulic head (b) as input and output to direct problem

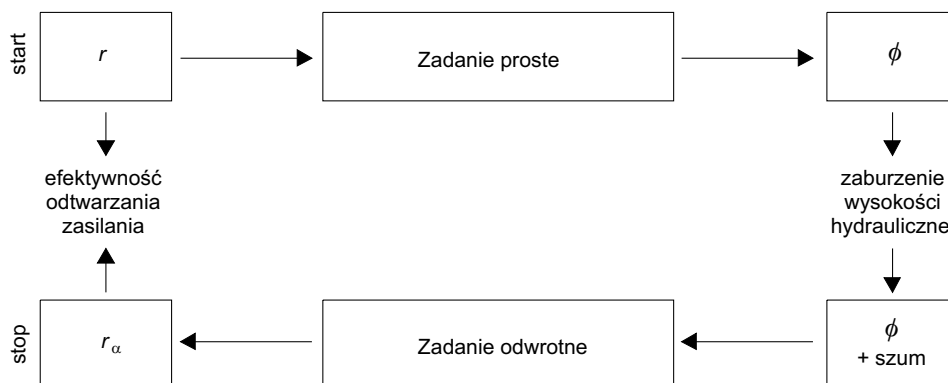
Tabela 1. Wielkość strumienia infiltracji na założonych obszarach zasilania

Table 1. Recharge rates and its spatial distribution

Obszar	Powierzchnia km ²	Zasilanie wyrażone jako procent opadu	Zasilanie wyrażone w m ³ /m ² /s
A	3,1416	25%	$5,1528 \cdot 10^{-9}$
B	1,5394	30%	$6,1834 \cdot 10^{-9}$
C	0,5027	35%	$7,2140 \cdot 10^{-9}$
D	0,1257	40%	$8,2445 \cdot 10^{-9}$

Rozwiązanie zadania odwrotnego

Rozwiązanie zadania odwrotnego zrealizowano na dwa sposoby. Pierwszy polegał na rozwiązaniu klasycznego równania przepływu (7). Podejście to potwierdziło sygnalizowane wcześniej obawy, że proste różniczkowanie wysokości hydraulicznej prowadzi do złego sformułowania problemu odtwarzania zasilania. Drugi z badanych sposobów opierał się na zmodyfikowanym równaniu przepływu (8). W obydwu przypadkach przestrzenny rozkład wysokości hydraulicznej, konieczny do rozwiązania zadania, był rozkładem otrzymanym w wyniku rozwiązania zadania prostego. Na rycinie 3 przedstawiono schematycznie sposób przeprowadzania eksperymentów numerycznych. Dla założonego rozkładu przestrzennego zasilania infiltracyjnego $r(x,y)$ rozwiązywano zadanie proste, wyznaczając tym samym rozkład przestrzenny wysokości hydraulicznej $\phi(x,y)$, który następnie zaburzono, dodając losową wartość szumu.



Ryc. 3. Schemat przeprowadzania eksperymentów numerycznych
Fig. 3. Idea of numerical experiments

Zaburzenie to polegało na dodaniu do każdej dyskretnej wartości $\phi_{i,j}$ zaburzenia o wartości $a\zeta\Delta\phi$, gdzie a jest liczbą losową z przedziału $[-0,5;0,5]$, ζ jest liczbą z przedziału $[0;1]$, natomiast $\Delta\phi$ oznacza różnicę między ekstremalnymi wartościami funkcji ϕ . Wartość zaburzenia, iloczyn powyższych trzech liczb, daje losowy szum o amplitudzie $\zeta\Delta\phi$. W większości eksperymentów numerycznych traktowano ζ jako parametr, który przyjmuje wartości ze zbioru $\{0; 0,0001; 0,001; 0,01; 0,1; 1\}$. Zaburzone wartości funkcji $\phi(x,y)$ posłużyły do rozwiązania zadania odwrotnego, którego efektem był rozkład zasilania infiltracyjnego $r_\alpha(x,y)$. Porównanie wyniku rozwiązania zadania odwrotnego z wymuszeniem zadania prostego pozwoliło na zbadanie efektywności odtwarzania zasilania oraz analizy obszaru zastosowań prezentowanych metod. W tym celu przyjęto wskaźnik jakości odtwarzania zasilania σ zdefiniowany jako:

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{\alpha,i,j} - r_{i,j}| \quad (9)$$

gdzie: $r_{i,j}$ – strumień znanego (wymuszenie zadania prostego) zasilania infiltracyjnego w dyskretnym węźle i,j ,

$r_{\alpha,i,j}$ – strumień odtwarzanego (rozwiązanie zadania odwrotnego) zasilania infiltracyjnego w dyskretnym węźle i,j ,

m,n – liczba węzłów dyskretyzacji w kierunkach X i Y .

Wartość wskaźnika σ , równa sumie wartości bezwzględnej różnicy między zasilaniem znanym a , przyjmuje wartości od zera dla przypadku, gdy $r_\alpha \equiv r$ do nieskończoności oraz może być interpretowany jako całkowity błąd rozwiązania zadania odwrotnego. W zmodyfikowanej postaci:

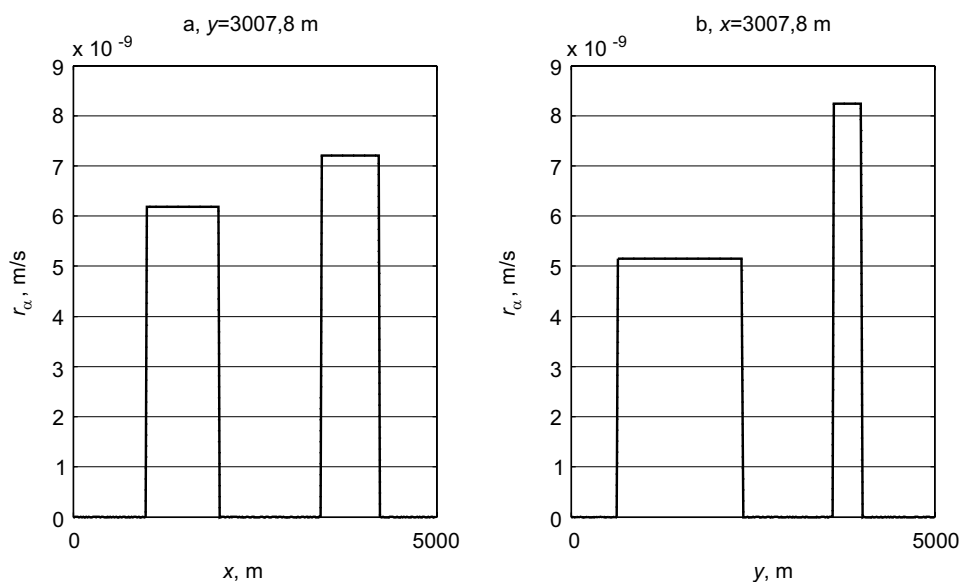
$$\sigma^* = \frac{\sigma}{m \cdot n} \quad (10)$$

wskaźnik ten oznacza średni błąd wyrażony w jednostkach zasilania infiltracyjnego odniesiony do pojedynczego węzła obliczeniowego, co z kolei pozwala odnieść go do wartości funkcji r .

Zadanie odwrotne zdefiniowane za pomocą klasycznego równania przepływu

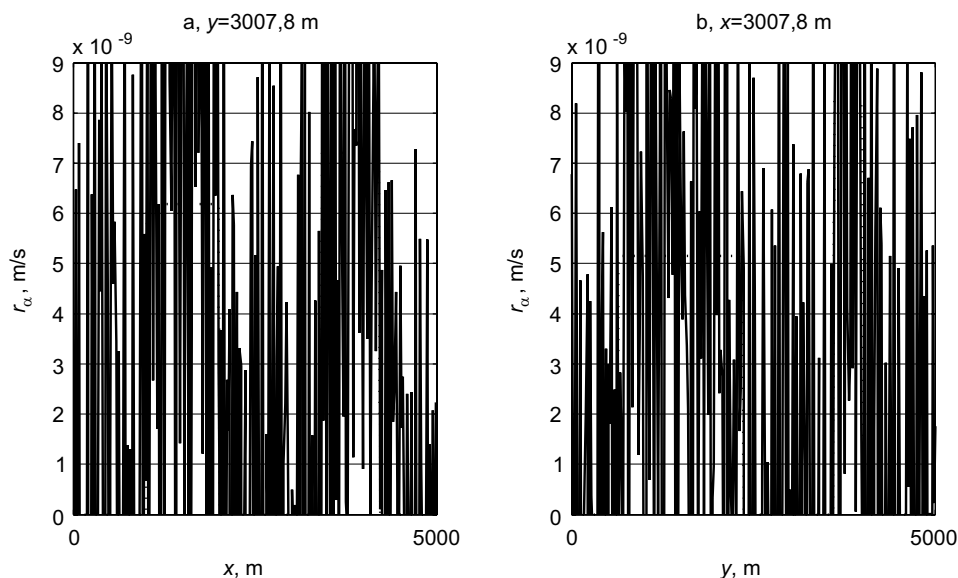
Wyznaczanie zasilania infiltracyjnego z równania przepływu, jak już wielokrotnie wspomniano, jest rozwiązywaniem źle sformułowanego zadania odwrotnego. Eksperymenty numeryczne, których wyniki przedstawiono poniżej, potwierdzają tę tezę. Biorąc pod uwagę, że wartości funkcji r zawierały się w przedziale $[0; 8,2445 \cdot 10^{-9}]$ m/s (patrz: ryc. 2a), wartości parametru σ^* większe o kilka rzędów wielkości świadczą dobitnie o nieprzydatności tego podejścia w przypadku szumu, dla którego wystąpiły.

Jedynie dla $\zeta = 0,0001$, gdy parametr σ^* osiągnął wartość tego samego rzędu co średnia wartość strumienia infiltracji, można mówić o sukcesie odtworzenia zasilania, natomiast dla $\zeta = 0,0010$ sukces jest połowiczny. Możliwe staje się bowiem jedynie wyznaczenie obszarów zasilania (kształt oraz rozmieszczenie w przestrzeni), co może okazać się również przedmiotem zainteresowania mimo dużego błędu wyznaczonych wartości. Ten „jakościowy” element rozwiązania zadania odwrotnego przedstawiony został na rycinie 9.



Ryc. 4. Rozkład zasilania infiltracyjnego odtworzonego na podstawie nie zaburzonych wartości funkcji $\phi(\zeta=0)$

Fig. 4. Spatial distribution of recharge estimated using exact values of $\phi(\zeta=0)$

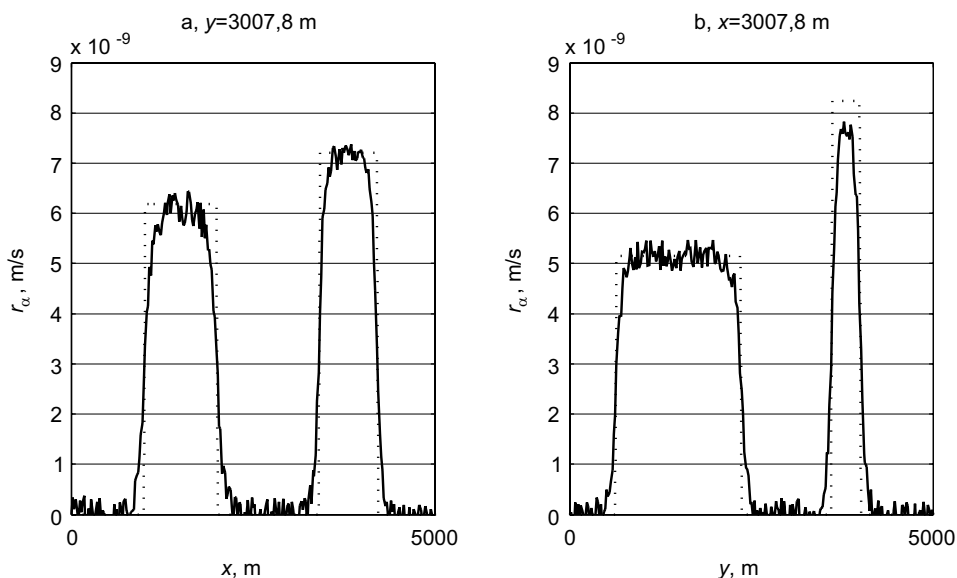


Ryc. 5. Przykładowy rozkład odtworzonego zasilania infiltracyjnego dla $\zeta = 0,0001$
 Fig. 5. Example of distribution of estimated recharge $\zeta = 0,0001$

Zadanie odwrotne zdefiniowane za pomocą zmodyfikowanego równania przepływu

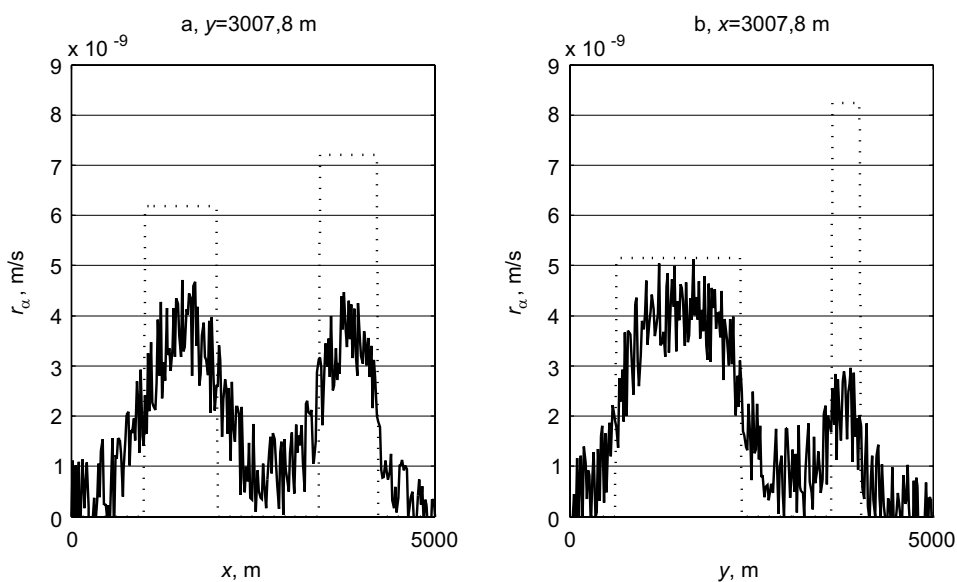
Zgodnie z proponowaną modyfikacją równania przepływu, która prowadzi do dobrego sformułowania zadania odwrotnego rekonstrukcji wymuszeń, zbadano efektywność odtwarzania zasilania infiltracyjnego na podstawie równania (3). W eksperymentach numerycznych obok zdefiniowanego wcześniej parametru ζ charakteryzującego wielkość zaburzenia nakładanego na funkcję wysokości hydraulicznej, pojawił się parametr α , który występuje w równaniu (3). Celem badań było sprawdzenie, czy dodanie różniczkowego członu zastępującego funkcję źródłową istotnie poprawi efektywność odtwarzania zasilania oraz dla jakich wartości parametru α efektywność ta jest największa.

Należy zauważyć, że gdy $\alpha = 0$ zmodyfikowane równanie przepływu jest tożsame z klasycznym równaniem przepływu, a zatem należy oczekiwać, że jakość wyznaczania zasilania w tym przypadku będzie porównywalna. Otrzymane wyniki pozwalają wnioskować, że jakość odtwarzania zasilania za pomocą zmodyfikowanego równania przepływu jest o wiele większa niż w przypadku równania klasycznego. Możliwe stało się wyznaczenie kształtu obszarów oraz strumienia zasilania dla wartości szumu rzędu $0,1 \Delta\phi$ (w badanych przypadkach 10^{-1} m). Ryciny 6 i 7 przedstawiają wybrane rozkłady odtworzonego zasilania infiltracyjnego dla różnych wielkości parametru ζ oraz optymalnych w danym przypadku wartości parametru α .

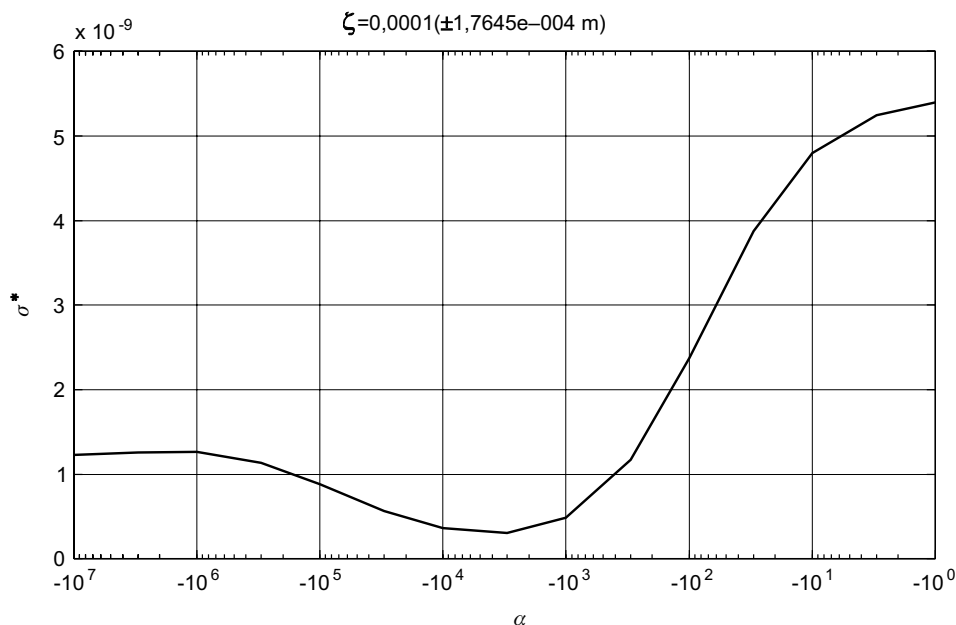


Ryc. 6. Rozkład odtworzonego zasilania infiltracyjnego dla $\zeta = 0,0001$ oraz $\alpha = -3 \cdot 10^3$
 Fig. 6. Spatial distribution of groundwater recharge for $\zeta = 0,0001$ and $\alpha = -3 \cdot 10^3$

Wyniki obliczeń pozwalają stwierdzić, że w przypadku szumu o dużej amplitudzie (nie większej jednak niż $\Delta\phi$) można odtworzyć jedynie kształt oraz położenie obszarów zasilania, natomiast wielkość strumienia zasilania infiltracyjnego należy



Ryc. 7. Rozkład odtworzonego zasilania infiltracyjnego dla $\zeta = 0,01$ oraz $\alpha = -1 \cdot 10^5$
 Fig. 7. Spatial distribution of groundwater recharge for $\zeta = 0,01$ and $\alpha = -1 \cdot 10^5$



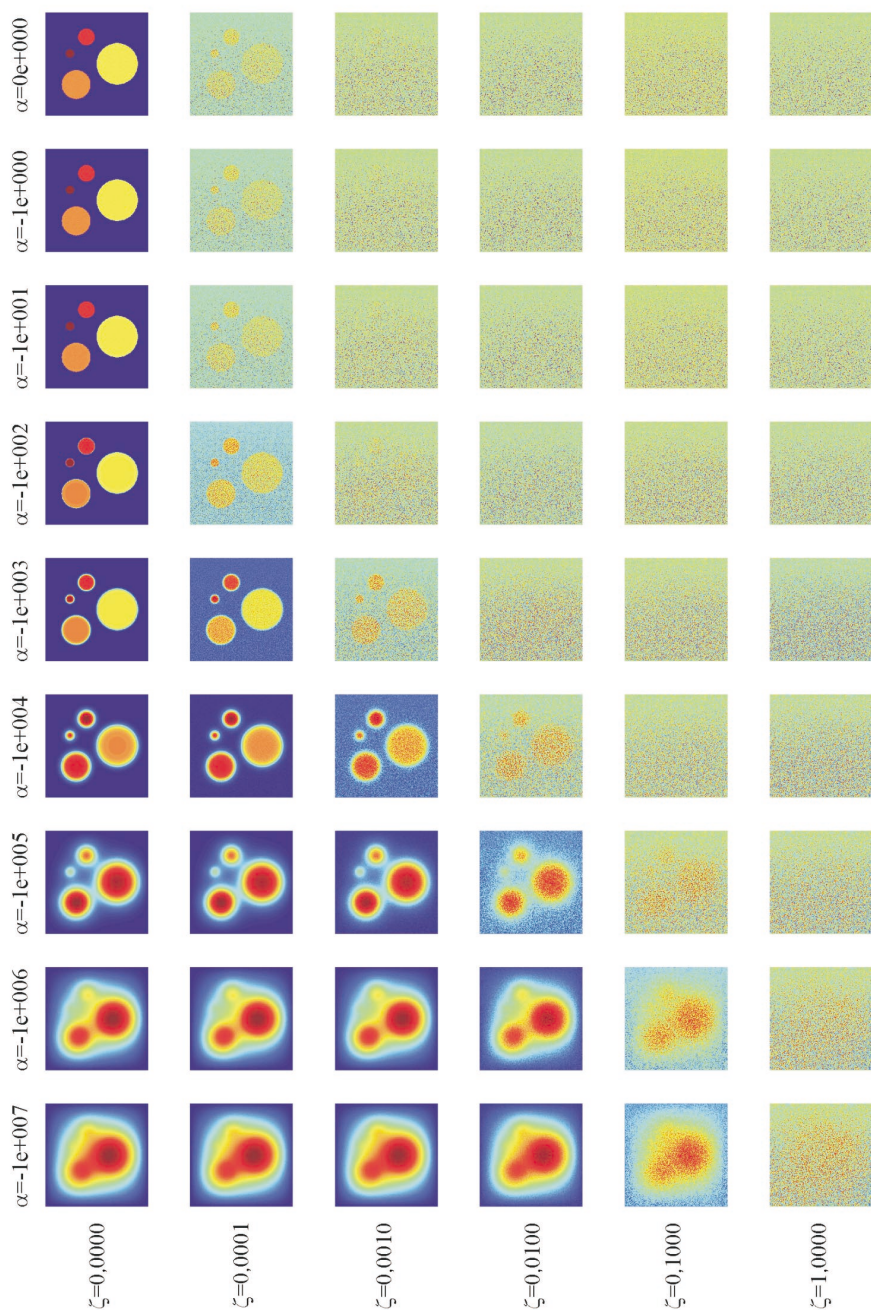
Ryc. 8. Przykładowa zależność efektywności wyznaczania zasilania od wartości parametru α
 Fig. 8. Example of estimation's effectiveness as a function of α

oszacować innymi metodami. Ponadto w przypadku badanych kształtów obszarów zasilania odtwarzanie wielkości strumienia okazało się efektywniejsze dla obszarów o dużych wymiarach przestrzennych w porównaniu do reprezentujących zasilanie skupione (patrz: ryc. 7b). Na rycinie 8 przedstawiono przykładowy wykres zależności efektywności odtwarzania zasilania od wartości α .

Efektom wprowadzenia do równania przepływu członu różniczkowego jest przestrzenne „rozmycie” zasilania, proporcjonalne do wartości bezwzględnej parametru α . Dobór najlepszej wartości α można traktować jako kompromis między tłumieniem szumów (np. błędów pomiaru) a wspomnianym efektem, przy czym przedział badanych w eksperymentach wartości α został ograniczony do wartości mniejszych lub równych 0, dokładniej do przedziału $[-10^7; 0]$. Dodatnie α , pomimo dobrych wartości parametru σ^* , prowadziły do nierzeczywistych rozwiązań, w których wyraźnie dostrzec można zjawiska falowe charakterystyczne dla członu różniczkowego modyfikującego równanie przepływu.

5. Wnioski

Dokładne obliczenie zasilania infiltracyjnego poprzez rozwiązanie zadania odwrotnego wykorzystującego klasyczne równanie dwuwymiarowego płaskiego przepływu wód podziemnych możliwe jest jedynie w sytuacji, gdy znany jest dokładny rozkład wysokości hydraulicznej. W przeciwnym wypadku wszelkie oszacowania zasilania tą metodą prowadzą do wartości, które nie mają interpretacji fizycznej.



Ryc. 9. Przestrzenny rozkład odtworzonego zasilania infiltracyjnego dla różnych wartości parametru ζ oraz różnych, ujemnych wartości parametru α

Fig. 9. Spatial distribution estimated groundwater recharge for different values of parameters ζ and α

Rozwiązanie zadania odwrotnego za pomocą zmodyfikowanego równania przepływu umożliwi oszacowanie zasilania nawet w przypadku zaburzonego rozkładu wysokości hydraulicznej.

W przypadku zaburzeń o dużej amplitudzie możliwe jest odtworzenie jedynie kształtu oraz położenia obszarów zasilania, natomiast wielkość strumienia zasilania infiltracyjnego należy oszacować innymi metodami.

Badana metodyka pozwala określić efektywne zasilanie strefy saturacji bez konieczności budowania modeli trójwymiarowych, tj. bez konieczności rozwiązywania silnie nieliniowych równań dla strefy niepełnego nasycenia.

W przypadku kształtów obszarów zasilania badanych w pracy szacowanie wielkości strumienia okazało się lepsze dla obszarów dużych. Można przypuszczać, że w sytuacji rzeczywistej warstwy wodonośnej szacowane wartości dla zasilania skupionego na stosunkowo małej powierzchni obarczone będą największym błędem.

Język programowania Matlab nadaje się bardzo dobrze do wielowymiarowych zadań opisywanych za pomocą macierzy. Pozwala budować przejrzysty kod, oferując wiele wbudowanych metod numerycznych.

Literatura

- Allison H., 1988. The principles of inverse modelling for estimation of recharge from hydraulic head. W: Simmers I. (red.), Estimation of Natural Groundwater Recharge, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Dąbrowski S., Przybyłek J., 2005. Metodyka próbnych pompowań w dokumentowaniu zasobów wód podziemnych. Poradnik metodyczny. Warszawa.
- Hendricks Franssen H.-J., Stauffer F., Kinzelbach W., 2004. Joint estimation of transmissivities and recharges – application: stochastic characterization of well capture zones. Journal of Hydrology 294.
- Nawalany M., 1984. Wody podziemne w ujęciu teorii systemów dynamicznych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, seria Budownictwo, z. 86, Warszawa.
- Nawalany M., Stachurski M., 2005. Zagadnienia odwrotne hydrogeologii. W: Sadurski A., Krawiec A. (red.), Współczesne problemy hydrogeologii. T. XII. Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Yeh William W.-G., 1986. Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem. Water Resources Research 22 (2).

